



DEMORAS EXPONENCIALES EN MODELOS DE LA DINÁMICA INDUSTRIAL

Natalia Rinauto¹
Luis Pedro Lara²
Roberto Manuel Martinez³

RESUMEN: Con un interés didáctico, analizamos los efectos de emplear demoras de diferentes órdenes en los modelos de Dinámica Industrial. Determinamos las soluciones analíticas y numéricas para un caso simple. En segundo lugar, consideramos un modelo de inventario continuo y determinístico. A través del análisis de estabilidad de ecuaciones diferenciales, demostramos que la incorporación de demoras de segundo orden o superior, no necesariamente mejora la respuesta del sistema, sino que introduce soluciones que no son deseables respecto al comportamiento real. Con este simple ejemplo, destacamos la importancia de ser cuidadosos en la construcción de los modelos para evitar la aparición de comportamientos dinámicos no deseados.

PALABRAS CLAVES: Dinámica Industrial, Simulación, Inventario

¹ Universidad del Centro Educativo Latinoamericano, Argentina - nataliarinauto@aguasnaturales.com

² Universidad del Centro Educativo Latinoamericano, Argentina - lp Lara2014@gmail.com

³ Universidad del Centro Educativo Latinoamericano, Argentina - romamar48@gmail.com

1 INTRODUCCIÓN

Desarrollamos, con un enfoque didáctico, las consecuencias de incorporar demoras de diferentes órdenes en el desarrollo de modelos de la Dinámica Industrial [14,15,16]. La misma fue desarrollada por Jay Forrester [1] en el Massachusetts Institute of Technology, siendo una técnica conceptualmente muy simple basada en diagramas de causalidad. El campo de aplicación de esta disciplina es sumamente vasto, que comprende desde las matemáticas, ingenierías, epidemiología hasta las ciencias sociales. Han surgido diferentes softwares comerciales que permiten la construcción gráfica de los modelos para su posterior evaluación numérica. Un aspecto interesante, introducido por Forrester, son las demoras exponenciales y estudió los efectos de ellas para la recuperación de los niveles de inventario. En las demoras de primer orden la tasa o flujo de salida es proporcional al nivel del material en tránsito, la demora de segundo orden consta de dos demoras en serie de primer orden, donde el tiempo de retardo es la mitad del retardo original, la de tercer orden son tres demoras en serie y así siguiendo. Determinó que la incorporación de demoras de orden superior resulta

beneficioso y contribuye a un mayor acercamiento al comportamiento real de los modelos. Sin embargo, en los problemas de inventario, la presencia de demoras en la reposición del stock suele introducir respuestas oscilatorias y hasta caóticas [5,6], las cuales no son deseables. Nosotros consideramos un modelo simple [2,3] como sistema dinámico determinístico, continuo y analizamos el comportamiento de los niveles en función del orden de las demoras. En segundo lugar, consideramos un clásico inventario basado en el trabajo de G. Gordon [4, 15], el cual considera solo una clase de artículo no perecedero y sin rotura, con tasas determinísticas. El trabajo está organizado de la siguiente manera, en la sección II estudiamos los efectos de las demoras de diferente orden. En la sección III, desarrollamos el modelo de inventario. En la sección IV, se analiza la respuesta del modelo al considerar demoras de diferente orden. Por último, en la sección V se presentan las conclusiones.

2 DEMORAS

Para comprender los efectos de las demoras en los modelos de Dinámica Industrial [1], consideramos un modelo muy simple, conformado por un único nivel X y dos tasas: una de entrada que consideramos constante de valor s y una de salida, que es linealmente proporcional al propio nivel X . En primer lugar, describimos la tasa de salida mediante la demora de primer orden: $x(t)/d$, siendo d la demora promedio en anular el nivel de inventario X . Por lo tanto, el modelo matemático es:

$$\dot{x}(t) = s - \frac{1}{d}x(t), \quad (1)$$

donde $\dot{} = d/dt$, $x(t)$ es el nivel de X . Integrando la Ec.(1), con el valor inicial $x_0 = x(0) > 0$ obtenemos:

$$x_1(t) = sd + (x_0 - sd)e^{-\frac{1}{d}t}, \quad (2)$$

donde el subíndice en el nivel de inventario x indica el orden de la demora empleada. Con esta demora, el nivel de inventario decae abruptamente hasta su valor asintótico $s d$. Para suavizar este comportamiento consideramos la demora de segundo orden en la tasa de salida, la cual genera las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = s - \frac{2}{d}x(t), \quad (3)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{2}{d}(x(t) - y(t)), \quad (4)$$

siendo $y(t)$ el valor nivel auxiliar Y , propio de la demora de segundo orden. El nivel de ocupación de X es entonces: $x_2 = x(t) + y(t)$. Integramos con los valores iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, obtenemos:

$$x_2(t) = sd + \left(x_0 - sd + \left(\frac{2}{d}x_0 - s \right) t \right) e^{-\frac{2}{d} t} \quad (5)$$

notar que la exponencial esta modulada por la función lineal, lo cual suaviza la evolución del nivel X . Consideramos ahora, la tasa de salida con demora de tercer orden, obteniendo:

$$\dot{x}(t) = s - \frac{3}{d}x(t),$$

$$\dot{y}(t) = \frac{3}{d}(x(t) - y(t)), \quad (6)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{3}{d}(y(t) - z(t)),$$

por lo tanto, el nivel de X es: $x_3 = x(t) + y(t) + z(t)$. Mediante los valores iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ obtenemos:

$$x_3(t) = sd + \left(x_0 - sd + \left(\frac{3}{d}x_0 - 2s \right) t + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{3}{d} \right)^2 x_0 - 3s \right) t^2 \right) e^{-\frac{3}{d} t}. \quad (7)$$

Por último, mediante el método de inducción, es fácil comprobar que para la demora orden n se obtiene:

$$x_n(t) = sd + p_{n-1}(s, d, x_0, t) e^{-\frac{n}{d} t}, \quad (8)$$

donde p_{n-1} es un polinomio de grado $n - 1$ en t . Para cualquier orden de demora, para tiempos muy grandes, x_n tiende a sd y por consiguiente la tasa de salida del sistema es igual a la de entrada s . Este simple resultado nos muestra que la solución estacionaria no depende de la demora empleada y que la incorporación de demoras suaviza la respuesta del sistema, ajustándose más a un comportamiento real. Sin embargo, en las secciones siguientes mostramos que esta conclusión no se puede generalizar en todos los modelos de Dinámica Industrial.

Para ilustrar mejor los resultados anteriores, desarrollamos numéricamente un caso considerando demoras hasta de cuarto orden. Resulta interesante considerar que la tasa s sea seccionalmente continua, $s(t) := \{s_1 > 0, \text{ si } t < t^*; s_2 > 0, \text{ si } t \geq t^*\}$. La integración la efectuamos de la siguiente manera, en el intervalo $[0, t^*]$ las soluciones están dadas por las fórmulas (2,5,7,8), según el orden de la demora. Luego en el segundo intervalo $[t^*, t]$ determinamos las nuevas condiciones iniciales mediante la solución obtenida en el primer intervalo y repetimos el proceso de integración, lo cual puede resultar algo tedioso. Sin embargo, resulta más simple integrar las ecuaciones a partir de $t=0$, empleando un método numérico, en nuestro caso usamos Runge Kutta de cuarto orden [8]. En la Fig. 1, mostramos el comportamiento de la tasa de salida de X en función del tiempo considerando demoras de hasta cuarto orden. Los parámetros utilizados son: por $x_0 = 10$, $y_k = 0$, $s_1 = 40$, $s_2 = 20$, $d = 4$, $t^* = 20$. De los resultados numéricos verificamos que al incrementar el orden de la demora se suaviza la evolución del nivel X , tal como fue predicho por las soluciones analíticas, siendo esta respuesta más acorde al mundo real lo cual mejora la calidad del modelo. Desde el punto de vista matemático, en la Ec.(8) el factor polinómico p_{n-1} , es quien contribuye a la suavización de la respuesta.

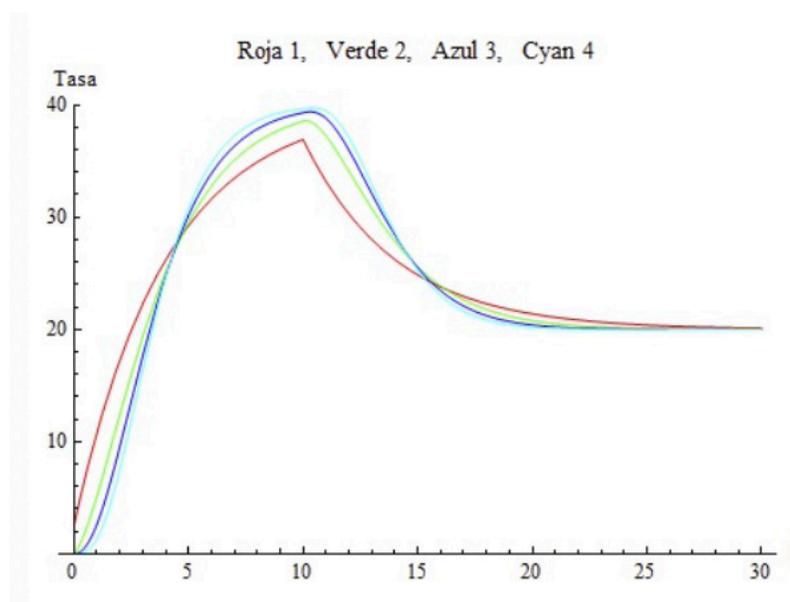


Figura 1: Tasa de salida del nivel X vs tiempo con diferentes órdenes de demora. Línea roja: demora de primer orden, línea verde segundo orden, línea azul tercer orden y línea Cyan cuarto orden.

Por último, con un enfoque didáctico, reescribimos el modelo en forma matricial, pues de esta forma las ecuaciones se simplifican notablemente, siendo su integración mucho más sencilla mediante el uso de la matriz exponencial e^C . Consideramos que la tasa de salida tiene una demora de orden n , entonces:

$$\dot{x}(t) = \frac{n}{d} A \cdot x + B,$$

donde $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; T es la transposición, siendo x_k k -ésimo valor del nivel auxiliar X_k . Recordar que el nivel de X es la sumatoria de x_k $k=1,2,\dots,n$. La matriz cuadrada A de orden n , tiene como elementos: -1 en su diagonal principal, 1 en la diagonal inferior a la principal y el resto de los elementos son nulos. El término no homogéneo solo contiene el flujo externo s : $B = (s, 0, \dots, 0)^T$. Mediante la condición inicial $x(0) = (x_0, 0, \dots, 0)^T$, obtenemos:

$$x(t) = e^{\frac{n}{d}A \cdot (t-t_0)} \left(x(t_0) - x_p \right) + x_p, \quad (9)$$

donde $x_p = -d/nA^{-1} \cdot B = (d/ns, d/ns, \dots, d/ns)^T$, es una solución particular. Por ser la matriz A triangular inferior y los elementos de la diagonal principal iguales a -1, entonces: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p$ para cualquier n .

3 UN SISTEMA SIMPLE DE INVENTARIO

El problema de modelar y simular el inventario es de gran interés en las empresas y comercios, razón por la cual es tratado todos los textos de Investigación Operativa [2, 3]. Los modelos pueden ser determinísticos, estocásticos o mixtos, y a su vez continuos, discretos o mixtos, donde existen interesantes publicaciones [4, 10, 11] en particular la revisión de inventario Bakker [12]. En este trabajo solo consideraremos un modelo continuo y determinista muy simple (Toy Model) para analizar las consecuencias de implementar demoras de diferentes órdenes. Una vez establecidas las características de los demoras de orden n , analizamos la incidencia de las mismas en un modelo de inventario continuo y determinista, desarrollado en el texto de G. Gordon [4]. El mismo cuenta con dos niveles: el inventario minorista X y el inventario de pedidos pendientes al minorista Y . Sobre el nivel de inventario del minorista X actúa una tasa de ventas $s(t)$. Asumimos que cuando el inventario minorista es nulo, se suspenden las ventas. El reabastecimiento al nivel X , se efectúa mediante la reposición del proveedor. La tasa de pedidos R al proveedor, está compuesta por la tasa de venta S más un control lineal del nivel X que se escribe como $k(inv - x(t))$, $k > 0$, siendo inv el nivel deseado del minorista y k una constante que pondera el control lineal. Dado que los niveles de inventario no pueden ser negativos, efectuamos el control en las tasas de manera que los niveles se mantengan no negativos. Este control hace que las ecuaciones diferenciales pierdan su linealidad. El caso más simple, corresponde en considerar las demoras de reposición de primer orden, las ecuaciones se escriben como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -s(t) + T_y, \\ \dot{y}(t) &= -T_y + R, \end{aligned} \quad (10)$$

donde $s(t) = s$, si $x(t) > 0$, y $s(t) = 0$ para $x(t) \leq 0$. La tasa T_y es, $T_y = (1/d) y(t)$, si $y(t) > 0$ y $T_y = 0$, para $y(t) \leq 0$. La tasa de pedidos del minorista al nivel Y es: $R = S(t) + k(inv - x(t))$, si $s(t) + k(inv - x(t)) > 0$ y $R = 0$, para $s(t) + k(inv - x(t)) \leq 0$.

Cuando las demora es de segundo orden, el nivel Y se desdobra en Y_1, Y_2 . Las ecuaciones son:

$$\dot{x}(t) = -S(t) + T_{y2},$$

$$\dot{y}_1(t) = -T_{y1} + R, \quad (11)$$

$$\dot{y}_2(t) = T_{y1} - T_{y2},$$

con $T_{y1} = 2y_1(t)/d$, si $y_1 > 0$, $T_{y1} = 0$ si $y_1 \leq 0$, si $T_{y2} = 2y_2(t)/d$, si $y_2 > 0$. Si bien las ecuaciones (10, 11) poseen solución explícita, dado al control de las tasas, resulta conveniente integrarlas numéricamente. En las Figs. 2-3 comparamos los niveles en el sector minorista X y los pendientes de ser entregados Y . En la Fig. 4, se comparamos las tasas hacia el minorista. La curva continua corresponde a la demora de segundo orden mientras que la de trazos, a la demora de primer orden. Los parámetros empleados son: $x_0 = 100$, $y_{10} = 50$, $y_{20} = 0$, $k = 0.5$, $inv = 70$, $d = 2$, $s = 25$. Por lo tanto, en este ejemplo y al igual que en la sección anterior, el incremento del orden de la demora no afecta el comportamiento asintótico; sin embargo, esta respuesta no siempre se cumple como mostramos en la sección siguiente.

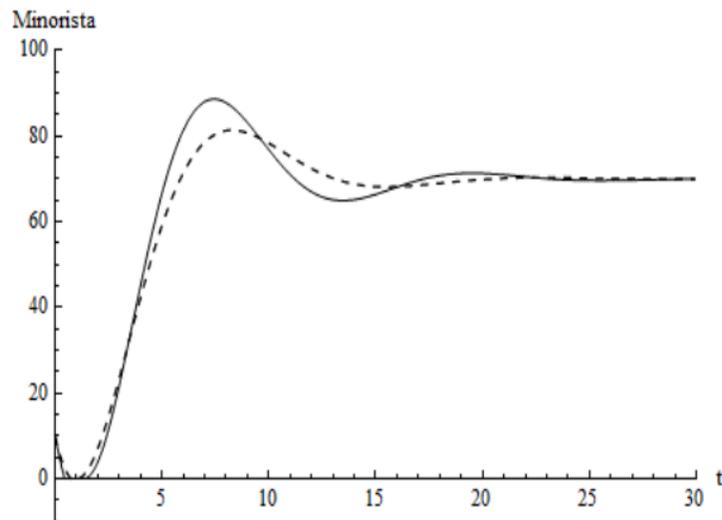


Figura 2: Nivel del minorista vs tiempo.

La curva a trazos corresponde a la demora de primer orden y la continua a segundo orden.

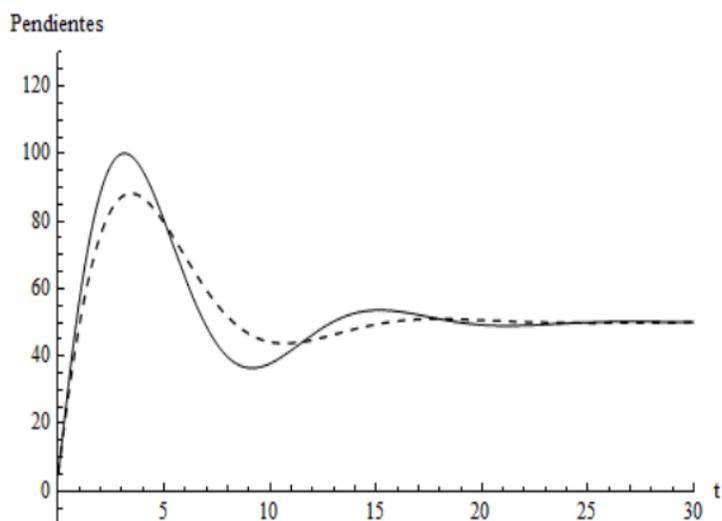


Figura 3: Nivel de pendientes pendientes al minorista vs tiempo. La curva de trazos corresponde a la demora de primer orden y la continua a segundo orden.

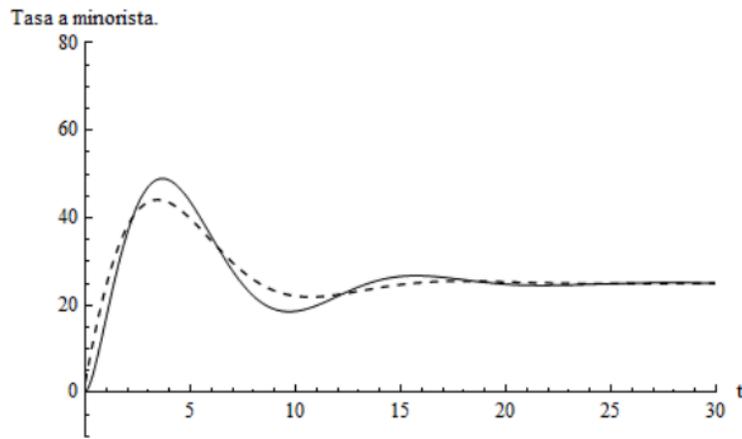


Figura 4: Tasa de reposición al sector minorista vs tiempo. La curva a trazos corresponde a la demora de primer orden y la continua a segundo orden.

4 CONSECUENCIA DE LA DEMORA

Teniendo en cuenta los resultados numéricos de la sección III, nos preguntamos si el régimen asintótico es independiente del orden de la demora. Para lo cual nos valemos de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales [8, 9, 13], la cual nos permite describir cualitativamente la dinámica del modelo sin la necesidad de emplear métodos numéricos o la búsqueda de soluciones explícitas. En V. Spiegler [5] demuestran como la no linealidad debido al control de la no negatividad de las soluciones puede generar comportamientos inesperados en la dinámica del sistema y en D. Rasmussen [6], estudiaron la presencia de soluciones caóticas. En esta sección analizamos el modelo de inventario descrito en la sección anterior. Para simplificar, consideramos que todos los niveles son positivos, lo cual es factible pues analizamos la dinámica en un entorno del punto fijo de las ecuaciones. Cuando la demora es de primer orden, el sistema (10) se reescribe como:

$$\dot{X} = A \cdot X + B, \quad (12)$$

con $X = (x, y)^T$, $A = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -kd & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -s \\ s + k \text{ inv} \end{pmatrix}$. La Ec.(12) posee un único punto fijo [9]: $X^* = (x^* = \text{inv}, y^* = s \cdot d)$. Su estabilidad [8] está determinada por los valores propios de la matriz A , los cuales son: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2d} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4kd} \right)$, teniendo en cuenta que $k, d > 0$ entonces obtenemos: $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$, por lo tanto el punto fijo X^* es asintóticamente estable.

Además, para $1 - 4kd < 0$, las soluciones convergen al punto fijo en forma oscilatoria. Con la demora de segundo orden, teniendo en cuenta (11) y (12), resulta $X = (x, y_1, y_2)^T$ y las matrices A, B :

$$A = \frac{2}{d} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2}kd & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = (-s \quad s + k \text{ inv} \quad 0)^T,$$

Cuyo único punto fijo es: $X^* = (x^* = inv, y_1^* = sd/2, y_2^* = sd/2)$. Los valores propios de la matriz A son: $\lambda_1 = -\frac{1}{3} \frac{4}{d} - \frac{2^{1/3}}{3d^2} a - \frac{2^{5/3}}{9} \frac{1}{a}$, $\lambda_{\pm} = -\frac{4}{3d} + \frac{1}{32^{2/3}d^2} (1 \mp i\sqrt{3}) a - \frac{2^{2/3}}{3} (1 \pm i\sqrt{3}) \frac{1}{a}$ con $a = \left(-4d^3 + 27kd^4 + 3\sqrt{3}\sqrt{kd^7(27kd-8)} \right)^{1/3}$; que determinan la estabilidad del punto fijo.

Para simplificar el análisis, consideramos los parámetros: $s = 25$, $d = 2$, $k = 5$, $inv = 70$; obtenemos: $\lambda_1 = -2.433$, $\lambda_{\pm} = 0.2167 \pm 1.417 i$. Dado que la parte real del valor propio λ_{\pm} es positiva, el punto fijo es semi-estable, con lo cual no todas las soluciones convergen al punto fijo como en el caso de demora de primer orden. Consideramos el valor inicial próximo al punto fijo: $X(0) = (x^* + 2, y_1^* + 3, y_2^* + 4)$ e integramos las ecuaciones de ambos modelos. En las Figs. 5-6 representamos los niveles de minorista y el de pedidos pendientes $Y = Y_1 + Y_2$, respectivamente. Con claridad puede verse la sustancial diferencia de comportamiento entre las dos demoras ya que una solución converge al punto fijo mientras con la demora de segundo orden diverge. Entonces, a través de este sencillo ejemplo, mostramos que el incrementar el orden de la demora, no necesariamente mejora la respuesta del modelo matemático.

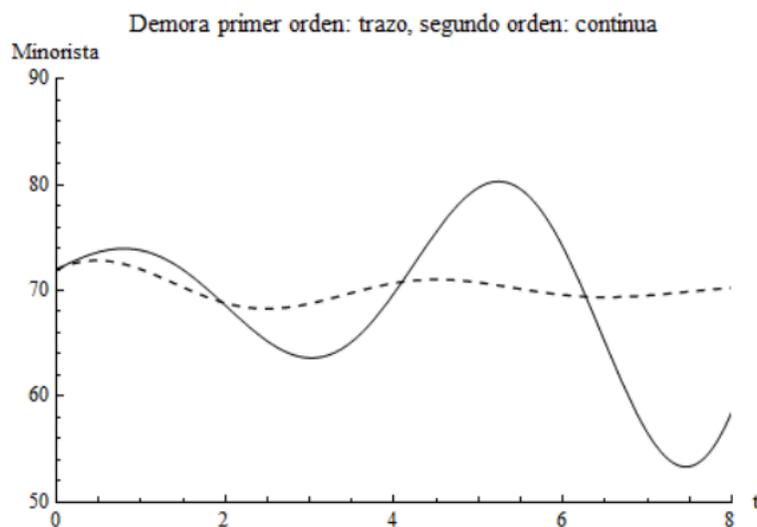


Figura 5: Evolución del nivel minorista vs el tiempo.

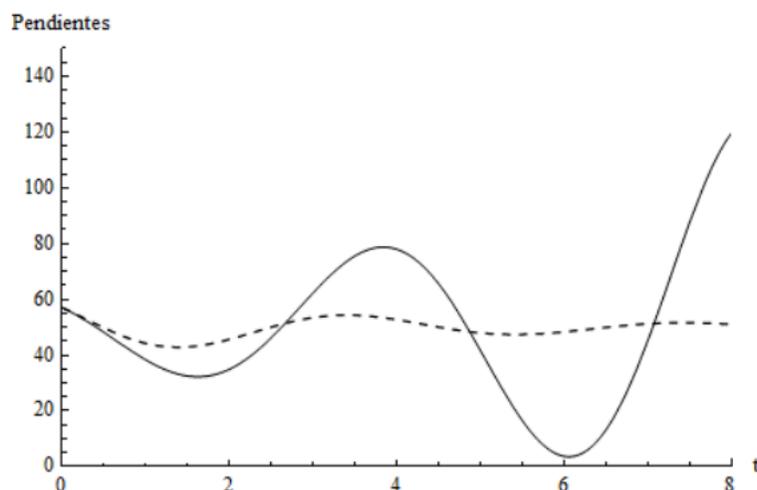


Figura 6: Evolución del nivel de pedidos pendientes al minorista vs el tiempo.

5 CONCLUSIÓN

Con la finalidad de alentar la construcción de modelos y simulación, lo cual ayuda de manera simple a comprender la dinámica un sistema real y las consecuencias de posibles cambios en la estructura del sistema; desarrollamos un simple ejemplo y mediante básicos conocimientos de ecuaciones diferenciales y métodos numéricos se determinó la dinámica del ejemplo sencillo en el cual se consideraron retardos de diferentes órdenes. En este ejemplo se determinó que en la medida que se incrementa el orden de la demora se suaviza la respuesta del sistema. Sin embargo, al estudiar un clásico y simple modelo de inventario, no sucede lo mismo, al punto de que surgen respuestas dinámicas que no son deseables. Mediante estos ejemplos, deseamos remarcar la importancia de efectuar un buen análisis a la hora de construir un modelo matemático.

EXPONENTIAL DELAYS IN MODELS OF INDUSTRIAL DYNAMICS

ABSTRACT: With a didactic interest, we analyze the effects of using delays of different orders in the Industrial Dynamics models. We determine the analytical and numerical solutions for a simple case. Second, we consider a deterministic continuous inventory model. Through the stability analysis of differential equations, we show that the incorporation of delays of second order or higher does not necessarily improve the response of the system, but rather introduces solutions that are not desirable with respect to the real behavior. With this simple example, we highlight the importance of being careful in the construction of the models to avoid the appearance of unwanted dynamic behaviors

KEYWORDS: Industrial Dynamics, Simulation, Inventory.

Originais recebidos em: 29/12/2020
Aceito para publicação em: 12/04/2021

REFERENCIAS

- Jay Forrester, **Industrial Dynamics**, MIT Press, Cambridge (1961).
- Hamdy A. Taha, **Operations Research: An Introduction**, 9th Ed., Prentice Hall, New York (2011).
- Frederick S. Hiller, Gerald J. Lieberman, **Introduction to operations research**, McGraw-Hill, New York, (2010).
- Gregori. Gordon, **Simulación de Sistemas**, Diana, México, (1981).
- V. L. M. Spiegler, M. M. Naim, **Investigating sustained oscillations in nonlinear production and inventory control models**, *European Journal of Operational Research* 261 (2017) 572-583.
- D. R. Rasmussen, E. Mosekilde, **Bifurcations and chaos in a genetic management model**, *European Journal of Operational Research* 35 (1988) 80-88.
- David Kincad, Ward Chenet, **Numerical Analysis**, Addison.Wesley, New York (1994).
- Steven H. Strogatz, **Nonlinear Dynamics and Chaos**, Westview Press, Cambridge (2000).
- Carmen Chicone, **Ordinary Differential Equations with Applications**, Springer, New York (1999).
- Jui-Jung Liao, Kuo-Nan Huang. **Deterministic inventory model for deteriorating items with trade credit financing and capacity constraints**, *Computers & Industrial Engineering* 59 (2010) 611–618.
- Peter Shaohua Deng, Robert H.-J. Lin, Peter Chu. A note on the inventory models for deteriorating items with ramp type demand rate. **European Journal of Operational Research** 178 (2007) 112–120.
- Monique Bakker, Jan Riezebos, Ruud H. Teunter, Review of inventory systems with deterioration since 2001. **European Journal of Operational Research** 221 (2012) 275–284.
- Luis Lara, Fernando Roda, Propiedades Cualitativas de un Modelo de Inventario con Rotura. **Iberoamerican Journal of Industrial Engineering**, v. 4, n. 7, p. 215-230, 2012.
- Sandra Oviedo, Alfredo Leiva, Daniel Díaz, Raymundo Forradellas, System Dynamics: modeling flexible in reverse logistics. **Iberoamerican Journal of Industrial Engineering**, v. 5, n. 10, p. 84-98, 2013.
- Javier Aracil, Francisco Gordillo. **Dinámica de Sistemas**, Alianza Editorial, Madrid (1997).
- Bilash Kanti Bala, Fatimah Mohamed Arshad, Kusairi Mohd Noh. **System Dynamics Modelling and Simulation**, Springer, Singapore (2017).